Gabarito - Primeira Prova

Questão 1

a) $\{X_t\}$ é fracamente estacionária se $E(X_t) = \mu, \forall t$, $E(X_t^2) < \infty$ e $cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k)$ é independente de t para $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\{X_t\}$ é fortemente estacionária se $\{X_1, \dots, X_n\}$ e $\{X_{1+k}, \dots, X_{n+k}\}$ tem a mesma distribuição conjunta para $n \geq 1$ e para $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\{X_t\}$ é um Ruído Branco se $X_t = X_{t-1} = \epsilon_t$, em que ϵ_t é Ruído Branco.

Questão 2

a)

- $\{X_t\}$, MA(q), sempre é estacionária.

$$E(X_t) = \mu$$
$$Var(X_t) = \left(\sum_{k=1}^{q} \theta_k^2 + 1\right)\sigma^2$$
$$\gamma(1) = \theta_1$$
$$\gamma(2) = 0$$

- $\{X_t\}$ (MA(q)) é invertível se, e somente se, todas as raízes do polinômio MA $\theta(z)$ são maiores que 1 em módulo.

b)
- X_t sempre é estacionária.
- X_t é invertível se, e somente se $|\theta_1| < 1$

c)
- X_t sempre é estacionária.
- X_t é invertível se, e somente se, $|\theta_2| < 1$, $\theta_1 + \theta_2 > -1$, $-\theta_1 + \theta_2 > -1$.

Questão 3

a) $\varphi_0 = 0 \Rightarrow E(X_t) = 0$

$$E(X_{t-1} X_t) = \gamma_1 = E\left[\varphi_1 X_{t-1} X_{t-1} + X_{t-1} + \epsilon_t\right] = \varphi_1 E\left[X_{t-1}^2\right] = \varphi_1 \gamma_0$$

$$\gamma_0 = E\left[X_t^2\right] = E\left[\varphi_1 X_{t-1} X_t + X_t \epsilon_t\right] = \varphi_1 E\left[X_t X_{t-1}\right] + E(X_t \epsilon_t)$$

$E[\epsilon_t(\varphi_1 X_{t-1} + \epsilon_t)) = E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$.

Então

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \sigma^2 = \varphi_1(\varphi_1 \gamma_0) + \sigma^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}$$

b) $\phi_{11} = \rho_1$

$\phi_{22} = 0$

c) $\gamma_1 = E[X_{t+1} X_{t+m}] = E[\varphi_1 X_{t-1}^2 + X_{t-1}\epsilon_t]$

$= \varphi_1 \gamma_0$

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_1 \sigma^2}{1-\varphi_1^2}$$

- $\rho_1 = \varphi_1$

$\gamma_2 = E[X_{t-2} X_t] = E[\varphi_1 X_{t-2} X_{t-1} + X_{t-2}\epsilon_t]$

$= \varphi_1 \gamma_1$

$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 = \varphi_1^2$

Questão 4

a) H_0: a série temporal não é estacionária.

b) H_0: a série temporal é estacionária.

c) H_0: $\rho_1 = \ldots = \rho_m = 0$, $1 \leq m < T$