# Medidas Resumo:
# Medidas de Posição, Medidas de Dispersão e Quantis

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

# Medidas de posição

## Medidas Resumo

Obter um ou mais números que sintetizem toda informação na amostra.
Consideraremos duas classes de medidas resumo: medidas de posição e medidas de dispersão.

## Medidas de Posição

Moda, Média e Mediana.

## Média

Suponha que os valores de uma variável $X$ em uma amostra sejam $x_1, \ldots, x_n$, então a média é calculada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

# Exemplo

Considere as notas finais ($X$) da Turma 1 de Estatística Aplicada à Saúde: 6,91; 7,85; 7,68; 8,64; 7,21; 8,04; 8,68; 4,37; 6,41; 7,89. Calcule a nota final média dessa turma.

**Solução:** Então a nota final média da Turma 1 é

$$\bar{x} = \frac{6,91 + 7,85 + 7,68 + 8,64 + 7,21 + 8,04 + 8,68 + 4,37 + 6,41 + 7,89}{10}$$

$$= 7,37.$$

# Uso da Tabela de Distribuiçao de Frequência: Caso Discreto

Se $X$ é uma variável quantitativa discreta com a seguinte tabela de distribuição de frequência

| $X$ | Frequência | Frequência Relativa (Proporção) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ | $f_1 = n_1/n$ | $100 \cdot f_1\,\%$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_k$ | $n_k$ | $f_k = n_k/n$ | $100 \cdot f_k\,\%$ |
| Total | $n = n_1 + \cdots + n_k$ | 1, 00 | 100% |

então a média de $X$ é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\overbrace{x_1 + \cdots + x_1}^{n_1 \text{ vezes}} + \overbrace{x_2 + \cdots + x_2}^{n_2 \text{ vezes}} + \cdots + \overbrace{x_k + \cdots + x_k}^{n_k \text{ vezes}}}{n} \\
&= \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_k}{n} \\
&= \overbrace{\frac{n_1}{n}}^{f_1} \cdot x_1 + \overbrace{\frac{n_2}{n}}^{f_2} \cdot x_2 + \cdots + \overbrace{\frac{n_k}{n}}^{f_k} \cdot x_k \\
&= f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \cdots + f_k \cdot x_k
\end{aligned}$$

# Exemplo

Retome a variável Número de Filhos ($Z$) da amostra com 36 funcionário da companhia MB cuja distribuição de frequência é dada por

| Número de Filhos | Frequência | Frequência Relativa (Propoção) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0,5556 | 55,56% |
| 1 | 5 | 0,1389 | 13,89% |
| 2 | 7 | 0,1944 | 19,44% |
| 3 | 3 | 0,0833 | 8,33% |
| 4 | 0 | 0,00 | 0,00% |
| 5 | 1 | 0,0278 | 2,78% |
| Total | 36 | 1,00 | 100% |

Calcule a média da variável $Z$.
**Solução:** Então a média é dada por

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{20 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{36} \\ &= 0,92,\end{aligned}$$

ou de forma alternativa

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 0,5556 \cdot 0 + 0,1389 \cdot 1 + 0,1944 \cdot 2 + 0,0833 \cdot 3 + 0,0278 \cdot 5 \\ &= 0,92.\end{aligned}$$

# Uso da Tabela de Distribuiçao de Frequência: Caso Contínuo

## Observação

Para variáveis quantiativas contínuas também podemos usar a Tabela de Distribuição de Frequência.
Note que nesse caso teremos uma aproximação da média, pois perdemos informação ao agregar os valores em classes.

Considere a variável quantitativa contínua $X$ cuja tabela de distribuição de frequência é

| X | Frequência | Proporção | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| $l_1 \mid - - - \, l_2$ | $n_1$ | $f_1 = n_1/n$ | $100 \cdot f_1\,\%$ |
| $l_2 \mid - - - \, l_3$ | $n_2$ | $f_1 = n_2/n$ | $100 \cdot f_2\,\%$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $l_k \mid - - - \, l_{k+1}$ | $n_k$ | $f_1 = n_k/n$ | $100 \cdot f_k\,\%$ |
| Total | $n = n_1 + \cdots + n_k$ | 1, 00 | 100% |

Usamos a simplificação: todos os valores observados de $X$ que pertencem a classe $l_i \mid - - - \, l_{i+1}, i = 1, \ldots, k$ são bem aproximados por $\dfrac{l_i + l_{i+1}}{2}$.

# Exemplo

Considere a variável quantativa contínua salário ($S$) da seção de orçamentos da companhia MB cuja tabela de distribuição de frequência é

| $S$ | Frequência | Frequência Relativa | Porcentagem | Ponto Médio |
|---|---|---|---|---|
| $4\vert - - - 8$ | 10 | $10/36 = 0,2778$ | $27,78\%$ | $(4+8)/2 = 6$ |
| $8\vert - - - 12$ | 12 | $12/36 = 0,3333$ | $33,33\%$ | $(8+12)/2 = 10$ |
| $12\vert - - - 16$ | 8 | $8/36 = 0,2222$ | $22,22\%$ | $(12+16)/2 = 14$ |
| $16\vert - - - 20$ | 5 | $5/36 = 0,1389$ | $13,89\%$ | $(16+20)/2 = 18$ |
| $20\vert - - - 24$ | 1 | $1/36 = 0,0278$ | $2,78\%$ | $(20+24)/2 = 22$ |
| Total | 36 | 1,00 | 100% | $- -$ |

**Solução:** Então a média salarial pode ser aproximada por

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \frac{10 \cdot 6 + 12 \cdot 10 + 8 \cdot 14 + 5 \cdot 18 + 1 \cdot 22}{36} \\ &= 0,2778 \cdot 6 + 0,3333 \cdot 10 + 0,2222 \cdot 14 + 0,1389 \cdot 18 + 0,0278 \cdot 22 \\ &= 11,22.\end{aligned}$$

Note que a média salarial sem usar a tabela de distribuição de frequência é $11,12$

Geralmente usamos essa medida de posição com variáveis quantitativas discretas.

## Moda

Realização mais frequente de uma variável.

## Exemplo

Considere a variável Número de Filhos ($Z$) da seção de orçamentos da companhia MB cuja tabela de distribuição é dada por

| Número de Filhos | Frequência | Frequência Relativa (Propoção) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0,5556 | 55,56% |
| 1 | 5 | 0,1389 | 13,89% |
| 2 | 7 | 0,1944 | 19,44% |
| 3 | 3 | 0,0833 | 8,33% |
| 4 | 0 | 0,00 | 0,00% |
| 5 | 1 | 0,0278 | 2,78% |
| Total | 36 | 1,00 | 100% |

Qual a moda?
**Solução:** A moda da variável Número de Filhos é 0.

## Mediana

Realização que ocupa a posição central da série de observações, ou seja, 50% das observações estão abaixo da mediana.

## Algoritmo para cáculo

Seja $X$ uma variável quantitativa com valores observados $x_1, \ldots, x_n$.

1) Ordenar os valores do menor ao maior:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}.$$

2)

$$md(x) = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

Note que $x_{(1)}$ representa o menor valor de $X$ na amostra, $x_{(2)}$ representa o segundo menor valor de $X$ na amostra, $x_{(3)}$ representa o terceiro menor valor de $X$ na amostra, e assim por diante. Chamamos $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ de estatísticas de ordem.

# Exemplo

**Exemplo: tamanho amostral par.**

Considere a variável quantitativa $X$ com valores observados: $2, 8, 4$. Calcule a mediana.
**Solução:** Primeiro ordenamos os valores

$$x_{(1)} = 2 \quad \leq \quad x_{(2)} = 4 \quad \leq \quad x_{(3)} = 8.$$

O tamanho amostral é $n = 3$, então

$$md(x) = x_{\left(\frac{3+1}{2}\right)} = x_{(2)} = 4.$$

**Exemplo: tamanho amostral ímpar.**

Considere a variável quantitativa $Y$ com valores observados: $1, 2, 3, 8$. Calcule a mediana.
**Solução:** Primeiro ordenamos os valores

$$x_{(1)} = 1 \quad \leq \quad x_{(2)} = 2 \quad \leq \quad x_{(3)} = 3 \quad \leq \quad x_{(4)} = 8.$$

O tamanho amostral é $n = 4$, então

$$md(x) = \frac{x_{\left(\frac{4}{2}\right)} + x_{\left(\frac{4}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5.$$

# Uso da tabela de distribuiçao de frequência: caso discreto

Considere a variável Número de Filhos com tabela de distribuição de frequência dada por

| Número de Filhos | Frequência | Frequência Relativa (Propoção) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0,5556 | 55,56% |
| 1 | 5 | 0,1389 | 13,89% |
| 2 | 7 | 0,1944 | 19,44% |
| 3 | 3 | 0,0833 | 8,33% |
| 4 | 0 | 0,00 | 0,00% |
| 5 | 1 | 0,0278 | 2,78% |
| Total | 36 | 1,00 | 100% |

Calcule a mediana.
**Solução:** Primeiro encontramos as estatísticas de ordem

$$x_{(1)} = x_{(2)} = \cdots = x_{(20)} = 0$$
$$x_{(21)} = x_{(22)} = x_{(23)} = x_{(24)} = x_{(25)} = 1$$
$$x_{(26)} = x_{(27)} = x_{(28)} = x_{(29)} = x_{(30)} = x_{(31)} = x_{(32)} = 2$$
$$x_{(33)} = x_{(34)} = x_{(35)} = 3$$
$$x_{(36)} = 5$$

O tamanho amostral $n = 36$ é par, então $md(x) = \dfrac{x_{\left(\frac{36}{2}\right)} + x_{\left(\frac{36}{2}+1\right)}}{2} = \dfrac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0.$

# Uso da tabela de distribuiçao de frequência: caso contínuo

## Observação

Para variáveis quantiativas contínuas também podemos usar a Tabela de Distribuição de Frequência.
Note que nesse caso teremos uma aproximação da mediana, pois perdemos informação ao agregar os valores em classes.

## Exemplo

Considere a variável salário ($S$) da seção de orçamentos da companhia MB cuja tabela de distribuição de frequência é

| $S$ | Frequência | Frequência Relativa | Porcentagem | Ponto Médio |
|---|---|---|---|---|
| $4 \vert - - - 8$ | 10 | $10/36 = 0,2778$ | $27,78\%$ | $(4+8)/2 = 6$ |
| $8 \vert - - - 12$ | 12 | $12/36 = 0,3333$ | $33,33\%$ | $(8+12)/2 = 10$ |
| $12 \vert - - - 16$ | 8 | $8/36 = 0,2222$ | $22,22\%$ | $(12+16)/2 = 14$ |
| $16 \vert - - - 20$ | 5 | $5/36 = 0,1389$ | $13,89\%$ | $(16+20)/2 = 18$ |
| $20 \vert - - - 24$ | 1 | $1/36 = 0,0278$ | $2,78\%$ | $(20+24)/2 = 22$ |
| Total | 36 | 1,00 | 100% | $--$ |

Calcule a mediana.

# Solução exemplo

**Solução:** Primeiro encontramos as estatísticas de ordem

$$s_{(1)} = s_{(2)} = s_{(3)} = x_{(4)} = s_{(5)} = s_{(6)} = s_{(7)} = s_{(8)} = s_{(9)} = s_{(10)} = 6$$
$$s_{(11)} = s_{(12)} = s_{(13)} = s_{(14)} = s_{(15)} = s_{(16)} = s_{(17)} = s_{(18)} = s_{(19)} = s_{(20)} = s_{(21)} = s_{(22)} = 10$$
$$s_{(23)} = s_{(24)} = s_{(25)} = s_{(26)} = s_{(27)} = s_{(28)} = s_{(29)} = s_{(30)} = 14$$
$$s_{(31)} = s_{(32)} = s_{(33)} = s_{(34)} = s_{(35)} = 18$$
$$s_{(36)} = 22$$

Note que o tamanho amostral $n = 36$ é par, logo

$$\begin{aligned} md(s) &= \frac{s_{(\frac{36}{2})} + s_{(\frac{36}{2}+1)}}{2} \\ &= \frac{s_{(18)} + s_{(19)}}{2} \\ &= \frac{10 + 10}{2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Note que 10 é uma aproximação para a mediana de salário cujo valor é 10,165 (usando os 36 valores observados na amostra).

# Exemplo

Um editor deseja estudar o número de erros de impressão de um livro. Para isso ele escolheu uma amostra de 50 páginas de um livro com a seguinte tabela de distribuição de frequência

| Erro de impressão ($X$) | Frequência | Frequência Relativa | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 25 | $25/50 = 0,5$ | $0,5 \cdot 100 = 50\%$ |
| 1 | 20 | $20/50 = 0,4$ | $0,4 \cdot 100 = 40\%$ |
| 2 | 3 | $3/50 = 0,06$ | $0,06 \cdot 100 = 6\%$ |
| 3 | 1 | $1/50 = 0,02$ | $0,02 \cdot 100 = 2\%$ |
| 4 | 1 | $1/50 = 0,02$ | $0,02 \cdot 100 = 2\%$ |
| Total | 50 | 1,00 | 100% |

a) Qual o número médio de erros por página?

b) E o número mediano?

c) Faça uma representação gráfica para a variável $X$.

d) Se o livro tem 500 páginas, qual o número aproximado de erros de impressão?

# Solução – exemplo.

a)

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{25 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{50} \\ &= 0,5 \cdot 0 + 0,4 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 + 0,02 \cdot 4 \\ &= 0,66\end{aligned}$$

b) Primeiro encontramos as estaísticas de ordem

$$x_{(1)} = x_{(2)} = x_{(3)} = \cdots = x_{(25)} = 0; \qquad x_{(26)} = x_{(27)} = x_{(28)} = \cdots = x_{(45)} = 1$$
$$x_{(46)} = x_{(47)} = x_{(48)} = 2; \qquad x_{(49)} = 3; \qquad x_{(50)} = 4$$

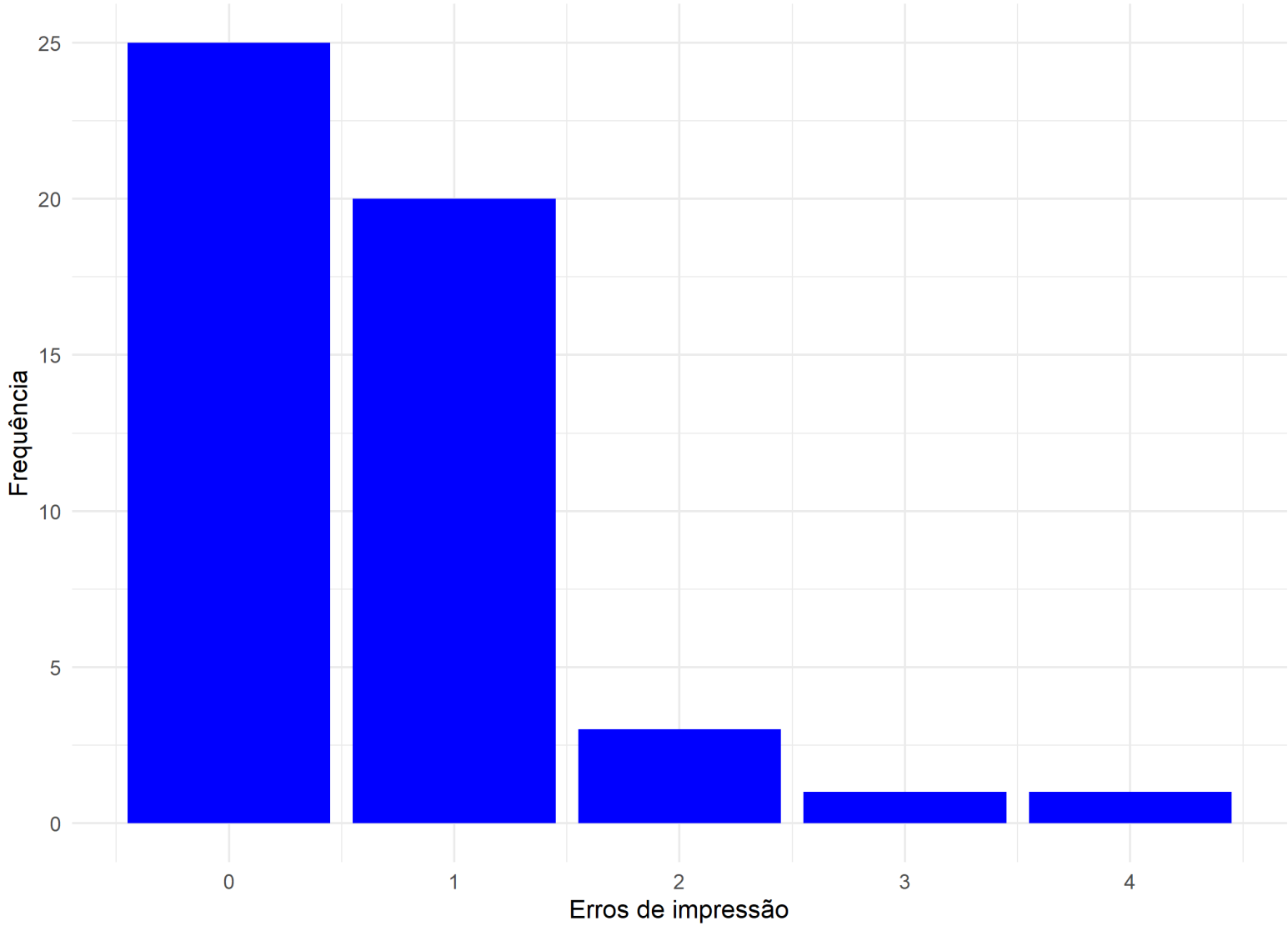
Note que $n = 50$ é par, logo

$$md(x) = \frac{x_{(\frac{50}{2})} + x_{(\frac{50}{2}+1)}}{2} = \frac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5.$$

d) Se um página tem aproximadamente $0,66$ erros, então 500 páginas tem aproximadamente $500 \cdot 0,66 = 330$ erros de impressão.

# Solução – exemplo: continuação

c) **Interpretação:** Notamos que a maioria das páginas tem até dois erros de impressão.



# Motivação

**Observação**

Note que a medida de posição pode mascarar a informação de como os dados estão dispersos.

**Exemplo de motivação.**

Um grupo de cinco alunos fizeram uma bateria de 5 testes, obtendo os seguintes resultados:

| Teste | Notas | | | | | Representação da variável |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $X$ |
| B | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | $Y$ |
| C | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | $Z$ |
| D | 4 | 5 | 5 | 6 | 5 | $W$ |

Exercício para casa: verifique que a moda, média e mediana de $X$, $Y$, $Z$ e $W$ são iguais 5.

# Motivação – continuação

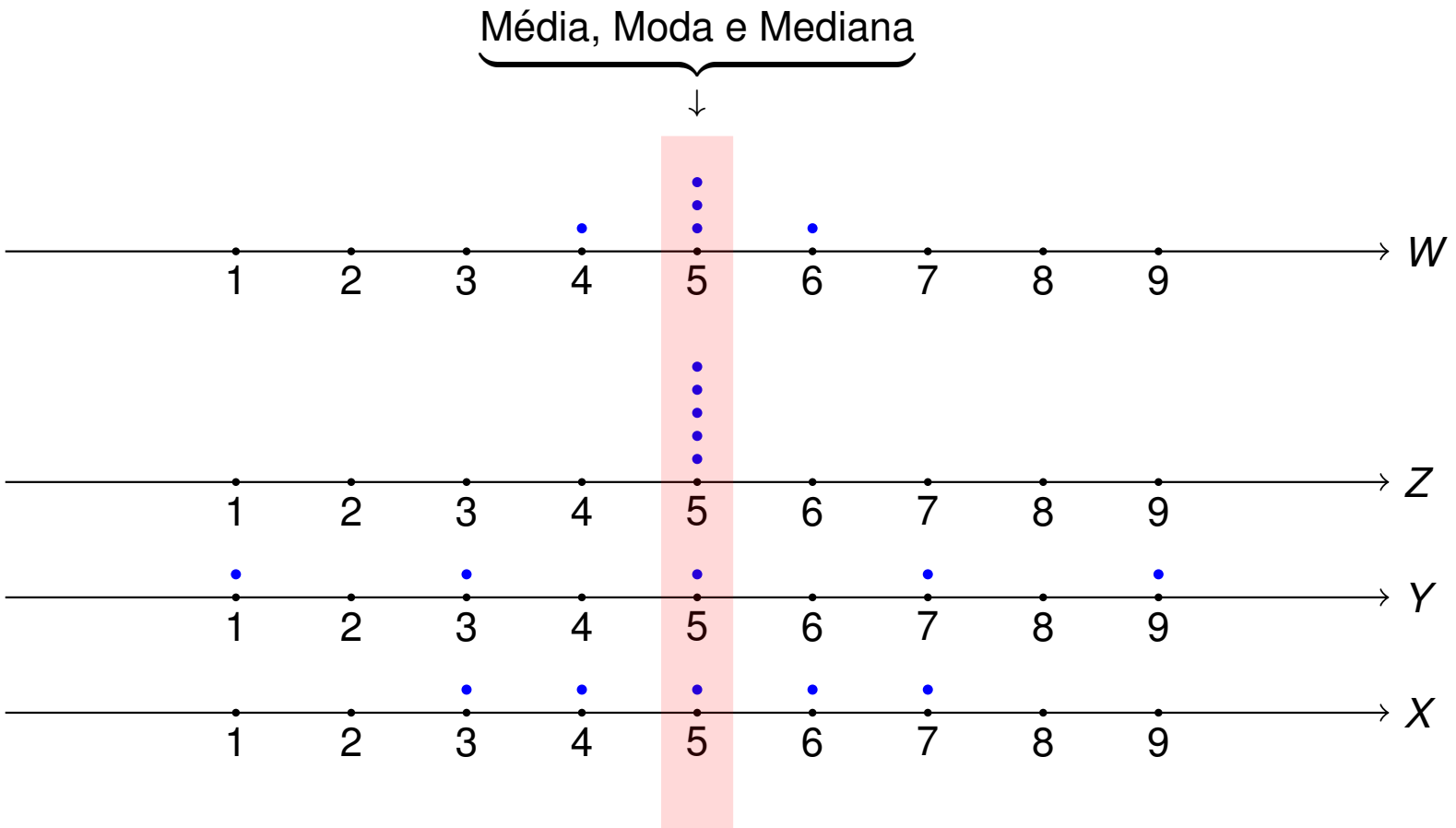



**Figura 1:** Representação gráfica para as variáveis $X$, $Y$, $Z$, $W$.

# Desvio Médio

## Limitação das medidas de posição

As variáveis $X$, $Y$, $Z$ e $W$ tem a mesma média, mediana e moda, mas na Figura 1 percebemos que as quatro variáveis não são semelhantes. Algumas variáveis tem valor mais acumulado em torno da média (mediana ou moda) enquanto outras variáveis tem valores mais "heterogêneos".

## Idea para superar a limitação das medidas de posição

Considere uma variável quantitativa com valores observados $x_1, \ldots, x_n$ e média $\bar{x}$, então

i. Calcule a distância (em valor absoluto) entre os valores observados e uma medida de posição (geralmente a média): $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, \cdots, |x_n - \bar{x}|$;

ii. Considere um valor representativo dessas distâncias, isto é, uma medida de posição de $\{|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, \ldots, |x_n - \bar{x}|\}$.

Se o valor obtido em ii. for pequeno os valores estão concentrados em torno da medida de posição (média) e são homogêneos.
Finalmente, podemos o Desvio Médio:

$$dm(x) = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}.$$

Note que usamos a média como medida de posição em ii.

# Variância e Desvio Padrão

### Idea para superar a limitação das medidas de posição

Considere uma variável quantitativa com valores observados $x_1, \ldots, x_n$ e média $\bar{x}$, então

i. Calcule a distância (ao quadrado) entre os valores observador e uma medida de posição (geralmente a média): $(x_1 - \bar{x})^2$, $(x_2 - \bar{x})^2$ $t$, $\cdots$, $(x_n - \bar{x})^2$ $t$;

ii. Considere um valor representativo dessas distâncias ao quadrado, isto é, uma medida de posição de $\{(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \ldots, (x_n - \bar{x})^2\}$

Se o valor obtido em ii. for pequeno os valores estão concentrados em torno da medida de posição (média) e são homogêneos.
Finalmente, podemos introduzir a Variância:

$$Var(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Note que usamos a média como medida de posição em ii.
Para manter a mesma unidade de $X$, é comum usar o Desvio Padrão

$$DP(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}.$$

### Motivação

Em nosso exemplo de motivação temos que

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\text{Var}(x) = 2$ | $\text{Var}(y) = 8$ | $\text{Var}(z) = 0$ | $\text{Var}(w) = 0,4$ |
| $DP(x) = 1,4$ | $DP(y) = 2,8$ | $DP(z) = 0$ | $DP(w) = 0,6$ |
| $dm(x) = 1,2$ | $dm(y) = 2,4$ | $dm(z) = 0$ | $dm(w) = 0,4$ |

e notamos que as variáveis não são semelhantes (valores são dispersos de forma diferente).

# Exemplo

Considere as notas finais ($X$) da Turma 1 de Estatística Básica A: 6,91; 7,85; 7,68; 8,64; 7,21 Calcule a nota final média dessa turma.

**Solução:** Primeiramente, calculamos a média

$$\bar{x} = \frac{6,91 + 7,85 + 7,68 + 8,64 + 7,21}{5} = 7,66$$

Então, o desvio médio é

$$\begin{aligned} dm(x) &= \frac{|6,91 - \bar{x}| + |7,85 - \bar{x}| + |7,68 - \bar{x}| + |8,64 - \bar{x}| + |7,21 - \bar{x}|}{5} \\ &= \frac{|6,91 - 7,66| + |7,85 - 7,66| + |7,68 - 7,66| + |8,64 - 7,66| + |7,21 - 7,66|}{5} \\ &= 0,48 \end{aligned}$$

e a variância é

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \frac{(6,91 - \bar{x})^2 + (7,85 - \bar{x})^2 + (7,68 - \bar{x})^2 + (8,64 - \bar{x})^2 + (7,21 - \bar{x})^2}{5} \\ &= \frac{(6,91 - 7,66)^2 + (7,85 - 7,66)^2 + (7,68 - 7,66)^2 + (8,64 - 7,66)^2 + (7,21 - 7,66)^2}{5} \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

e o desvio padrão é dado por $DP = \sqrt{0,35} = 0,59$.

# Uso da tabela de distribuiçao de frequência: caso discreto

Considere a variável Número de Filhos com tabela de distribuição de frequência dada por

| Número de Filhos | Frequência | Frequência Relativa (Propoção) | Porcentagem |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0,5556 | 55,56% |
| 1 | 5 | 0,1389 | 13,89% |
| 2 | 7 | 0,1944 | 19,44% |
| 3 | 3 | 0,0833 | 8,33% |
| 4 | 0 | 0,00 | 0,00% |
| 5 | 1 | 0,0278 | 2,78% |
| Total | 36 | 1,00 | 100% |

Já calculamos a média anteriormente: $\bar{x} = 0.92$. Então, o desvio médio é dado por

$$dm(z) = \frac{20 \cdot |0 - 0,92| + 5 \cdot |1 - 0,92| + 7 \cdot |2 - 0,92| + 3 \cdot |3 - 0,92| + 0 \cdot |4 - 0,92| + 1 \cdot |5 - 0,92|}{36}$$

$$= 1,02$$

e a variância é dada por

$$\text{Var}(z) = \frac{20 \cdot (0 - 0,92)^2 + 5 \cdot (1 - 0,92)^2 + 7 \cdot (2 - 0,92)^2 + 3 \cdot (3 - 0,92)^2 + 0 \cdot (4 - 0,92)^2 + 1 \cdot (5 - 0,92)^2}{36}$$

$$= 1,52$$

e o desvio padrão é $\sqrt{\text{Var}(z)} = 1,23$.

# Uso da Tabela de Distribuiçao de Frequência: Caso Contínuo

## Observação

Para variáveis quantiativas contínuas também podemos usar a Tabela de Distribuição de Frequência.
Note que nesse caso teremos uma aproximação das medidas de dipersão, pois perdemos informação ao agregar os valores em classes.

Considere a variável quantativa contínua salário ($S$) da seção de orçamentos da companhia MB cuja tabela de distribuição de frequência é

| $S$ | Frequência | Frequência Relativa | Porcentagem | Ponto Médio |
|---|---|---|---|---|
| $4 \vert - - - 8$ | 10 | $10/36 = 0,2778$ | $27,78\%$ | $(4+8)/2 = 6$ |
| $8 \vert - - - 12$ | 12 | $12/36 = 0,3333$ | $33,33\%$ | $(8+12)/2 = 10$ |
| $12 \vert - - - 16$ | 8 | $8/36 = 0,2222$ | $22,22\%$ | $(12+16)/2 = 14$ |
| $16 \vert - - - 20$ | 5 | $5/36 = 0,1389$ | $13,89\%$ | $(16+20)/2 = 18$ |
| $20 \vert - - - 24$ | 1 | $1/36 = 0,0278$ | $2,78\%$ | $(20+24)/2 = 22$ |
| Total | 36 | 1,00 | 100% | $--$ |

Calcule o desvio médio, a variância e o desvio padrão.

# Continuação – exemplo

Já vimos anteriormente, que a média salarial pode ser aproximada por 11,22. Então,

Desvio Médio

$$dm(s) = \frac{10 \cdot |6 - 11,22| + 12 \cdot |10 - 11,22| + 8 \cdot |14 - 11,22| + 5 \cdot |18 - 11,22| + 1 \cdot |22 - 11,22|}{36}$$

$$= 3,72;$$

Variância

$$\text{Var}(s) = \frac{10 \cdot (6 - 11,22)^2 + 12 \cdot (10 - 11,22)^2 + 8 \cdot (14 - 11,22)^2 + 5 \cdot (18 - 11,22)^2 + 1 \cdot (22 - 11,22)^2}{36}$$

$$= 19,40;$$

Desvio Padrão

$$DP(s) = \sqrt{\text{Var}(s)} = \sqrt{19,40} = 4,40.$$

# Quantis

## Ideia

Outra abordagem para medidas de posição de forma semelhante a mediana, substituindo 50% por $100 \cdot p\%$.

## Definição

Dizemos que um número $q(p) \in \mathbb{R}$ é quantil de ordem $p$ ou $p$-quantil se $100 \cdot p\%$ das observações $x_1, \ldots, x_n$ forem menores que $q(p)$.

## Alguns quantis importantes e seus nomes particulares

$q(0,25)$ Primeiro Quartil ($q_1$);

$q(0,5)$ Segundo Quartil ($q_2$) – sinônimo de mediana;

$q(0,75)$ Terceiro Quartil ($q_3$).

# Algoritmo para cálculo de quantis

Seja $X$ uma variável quantitativa com $x_1, \ldots, x_n$ seus valores observados na amostra.

i. Ordene os valores do menor ao valor (encontre as estatísticas de ordem)

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

em que $x_{(1)}$ é o menor valor em $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{(2)}$ é o segundo menor valor em $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_{(3)}$ é o terceiro menor valor em $\{x_1, \ldots, x_n\}$, e assim prosseguimos até $x_{(n)}$: o último menor valor em $\{x_1, \ldots, x_n\}$

ii.

$$q(p) = \begin{cases} x_{((n+1)\cdot p)}, & \text{se } (n+1)\cdot p \text{ é número inteiro,} \\ \dfrac{x_{(\lfloor (n+1)\cdot p \rfloor)} + x_{(\lceil (n+1)\cdot p \rceil)}}{2}, & \text{se } (n+1)\cdot p \text{ não é número inteiro.} \end{cases}$$

em que $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função “arredonda para baixo” e $\lceil \cdot \rceil$ é a função “arredonda para cima”.

# Exemplo

Considere a variável quantitativa $X$ com os seguinte valores observados: 15, 5, 3, 8, 10, 2, 7, 11, 12. Calcule o primeiro, o segundo e terceiro quartis.
**Solução:** Primeiro encontramos as estatísticas de ordem:

$$x_{(1)} = 2 \leq x_{(2)} = 3 \leq x_{(3)} = 5 \leq x_{(4)} = 7$$
$$x_{(5)} = 8 \leq x_{(6)} = 10 \leq x_{(7)} = 11 \leq x_{(8)} = 12 \leq x_{(9)} = 15$$

Os quartis são dados por

$q_1$ Note que $(n+1)\cdot 0,25 = (9+1)\cdot 0,25 = 2,5$, e $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$ e $\lceil 2,5 \rceil = 3$. Então,

$$q_1 = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4;$$

$q_2$ Note que $(n+1)\cdot 0,5 = (9+1)\cdot 0,5 = 5$. Então,

$$q_2 = x_{(5)} = 8;$$

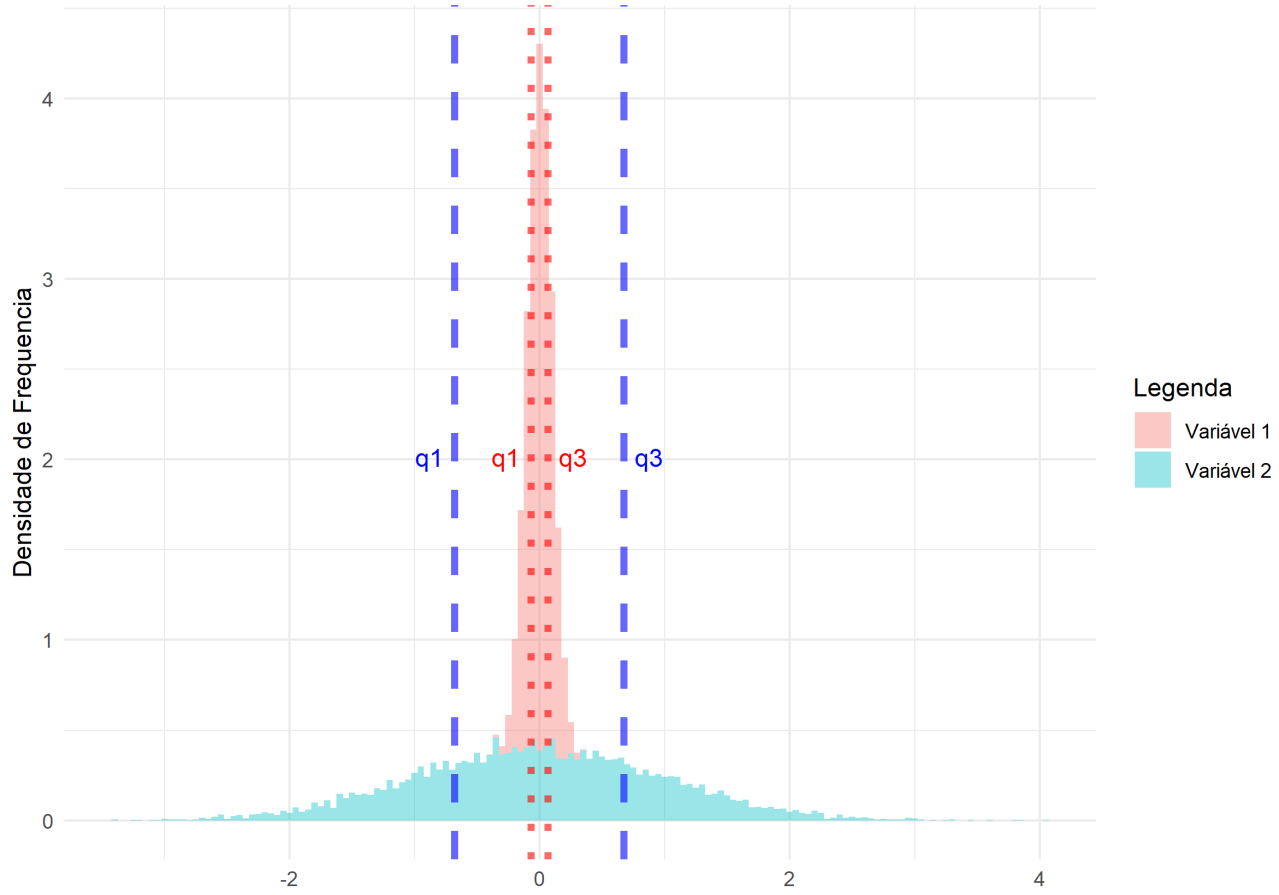
$q_3$ Note que $(n+1)\cdot 0,75 = (9+1)\cdot 0,75 = 7,5$, e $\lfloor 7,5 \rfloor = 7$ e $\lceil 7,5 \rceil = 8$. Então,

$$q_3 = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{11+12}{2} = 11,5.$$

# Intervalo Interquartílico

## Ideia

Se a distância entre $q_1$ e $q_3$ for pequena, então os valores da variável estão concentrados em uma região.



### Definição

Seja $X$ uma variável quantitativa com valores observados $x_1, \ldots, x_n$, então o intervalo interquartílico é dado por

$$dq = q_3 - q_1$$

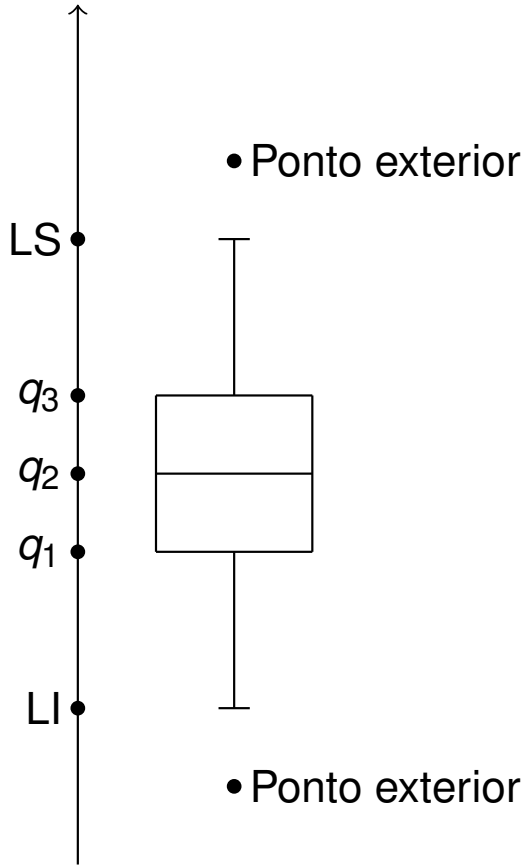
### Exemplo

Considere a variável quantitativa $X$ com os seguintes valores observados: 15, 5, 3, 8, 10, 2, 7, 11, 12. Calcule o intervalo interquartílico.
**Solução:** Já calculamos o primeiro e terceiro quartis para essa variável e essa amostra, então

$$dq = q_3 - q_1 = 11,5 - 4 = 7,5.$$

# Diagrama de Caixa ou Boxplot

O diagrama de caixa tem o seguinte aspecto



# Diagrama de Caixa ou Boxplot

Em que

**Limite Superior** $LS = q_3 + 1,5 \cdot dq$;

**Limite Inferior** $LI = q_1 - 1,5 \cdot dq$;

**Ponto Adjacente** Todos os valores da variável entre $LI$ e $LS$;

**Ponto Exterior** Todos os valores da variável que não estão entre $LI$ e $LS$. Estes valores da variável são provavelmente destoantes que precisam de atenção do pesquisador;

# Exemplo 1

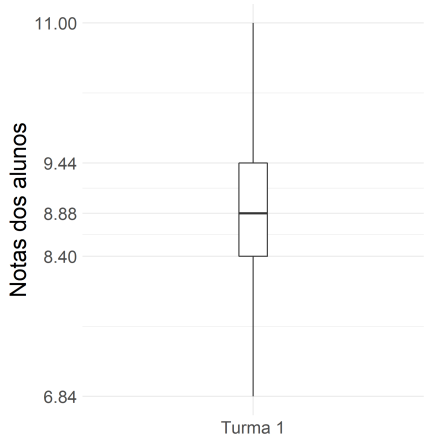
Considere as notas da Turma 1 de Estatística Aplicada à Saúde: 9,44; 9,26; 9,21; 9,51; 8,53; 8,4; 7,74; 8,75; 9,8; 9,5; 9,38; 8,36; 8,57; 9,18; 9,53. Desenhe o digrama de caixa.

**Solução**: Primeiro encontramos as estatísticas de ordem:

| $x_{(1)}$ | $x_{(2)}$ | $x_{(3)}$ | $x_{(4)}$ | $x_{(5)}$ | $x_{(6)}$ | $x_{(7)}$ | $x_{(8)}$ | $x_{(9)}$ | $x_{(10)}$ | $x_{(11)}$ | $x_{(12)}$ | $x_{(13)}$ | $x_{(14)}$ | $x_{(15)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,74 | 8,36 | 8,40 | 8,53 | 8,57 | 8,75 | 9,18 | 9,21 | 9,26 | 9,38 | 9,44 | 9,50 | 9,51 | 9,53 | 9,80 |

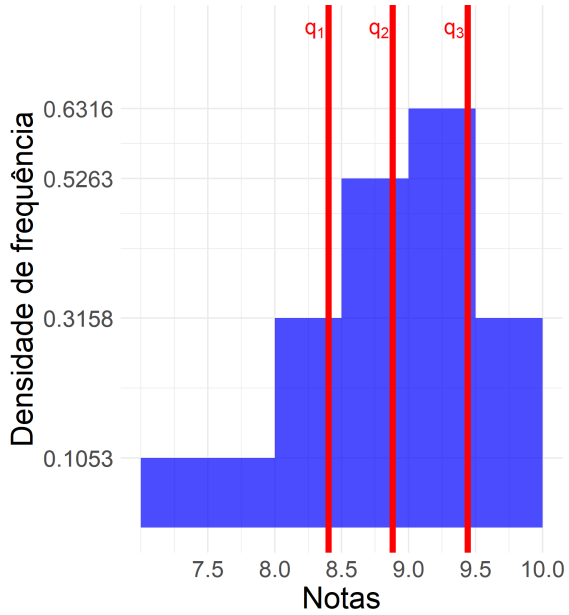
Em seguida, calculamos o primeiro quartil, o segundo quartil, o terceiro quartil, o intervalo interquartílico, o limite superior e o limite inferior:

$$(15+1)\cdot 0,25 = 4 \qquad (15+1)\cdot 0,5 = 8 \qquad (15+1)\cdot 0,75 = 12$$
$$q_1 = x_{(4)} = 8,53 \qquad q_2 = x_{(8)} = 9,21 \qquad q_3 = x_{(12)} = 9,50$$
$$dq = q_3 - q_1 = 0,97 \qquad LS = q_3 + 1,5 \cdot dq = 10,955 \qquad LI = q_1 - 1,5 \cdot dq = 7,075$$



# Exemplo 1

Note que os intervalos $[q_1, q_2]$ e $[q_2, q_3]$ têm 25% dos valores observados, ou seja, os valores estão mais concentrados no intervalo $[q_2, q_3]$ do que $[q_1, q_2]$. Quando isso ocorre, dizemos a variável é assimétrica à esquerda. A figura abaixo ilustra essa idea.




Se $q_3 - q_2 < q_2 - q_1$, dizemos que a variável tem assimetria a esquerda ou negativa ($q_2$ mais próximo de $q_3$);

# Exemplo 2

Considere as notas da Turma 2 de Estatística Aplicada à Saúde: 2,75; 4,54; 3,08; 4,74; 1,42; 0,61; 1,01; 1,61; 2,8; 8,93; 0,26; 0,58; 2,86; 0,08; 1,21; 1,44; 1,2; 1,24; 0,64. Desenhe o diagrama de caixa.

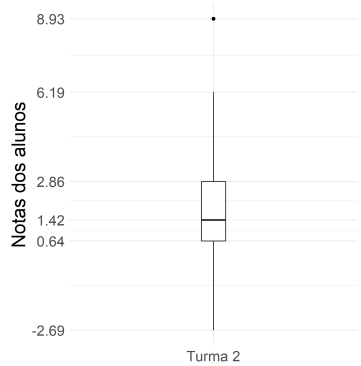
**Solução**: Primeiro encontramos as estatísticas de ordem:

| $x_{(1)}$ | $x_{(2)}$ | $x_{(3)}$ | $x_{(4)}$ | $x_{(5)}$ | $x_{(6)}$ | $x_{(7)}$ | $x_{(8)}$ | $x_{(9)}$ | $x_{(10)}$ | $x_{(11)}$ | $x_{(12)}$ | $x_{(13)}$ | $x_{(14)}$ | $x_{(15)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,08 | 0,26 | 0,58 | 0,61 | 0,64 | 1,01 | 1,2 | 1,21 | 1,24 | 1,42 | 1,44 | 1,61 | 2,75 | 2,8 | 2,86 |

| $x_{(16)}$ | $x_{(17)}$ | $x_{(18)}$ | $x_{(19)}$ |
|---|---|---|---|
| 3,08 | 4,54 | 4,74 | 8,93 |

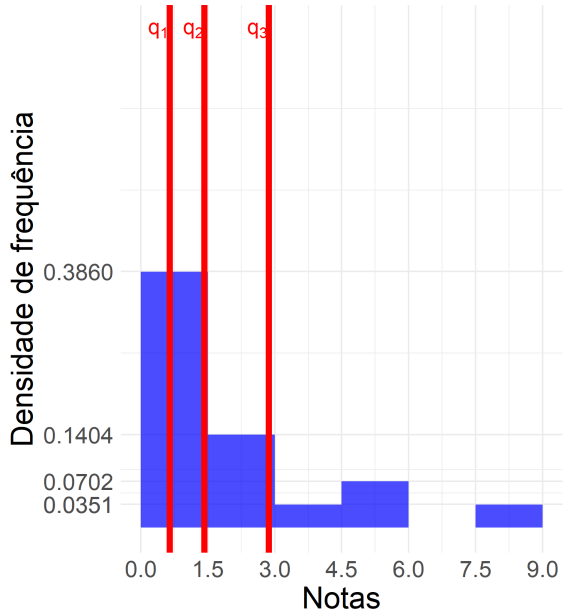
Em seguida, calculamos o primeiro quartil, o segundo quartil, o terceiro quartil, o intervalo interquartílico, o limite superior e o limite inferior:

$$(19+1)\cdot 0,25 = 5 \qquad (19+1)\cdot 0,5 = 10 \qquad (19+1)\cdot 0,75 = 15$$
$$q_1 = x_{(5)} = 0,64 \qquad q_2 = x_{(10)} = 1,42 \qquad q_3 = x_{(15)} = 2,86$$
$$dq = q_3 - q_1 = 2,22 \qquad LS = q_3 + 1,5\cdot dq = 6,19 \qquad LI = q_1 - 1,5\cdot dq = -2,69$$



# Exemplo 1

Note que os intervalos $[q_1, q_2]$ e $[q_2, q_3]$ têm 25% dos valores observados, ou seja, os valores estão mais concentrados no intervalo $[q_1, q_2]$ do que $[q_2, q_3]$. Quando isso ocorre, dizemos que a variável é assimétrica à direita. A Figura ilustra essa idea.




Se $q_2 - q_1 < q_3 - q_2$, dizemos que a variável tem assimetria à direita ou positiva ($q_2$ mais próximo de $q_1$);

# Assimetria

Inspirados nesses dois exemplos, podemos introduzir uma medida numérica de assimetria, denominado coeficiente de Bowley:

$$B = \frac{q_3 - 2q_2 + q_1}{q_3 - q_1} = \frac{q_3 - q_2 - (q_2 - q_1)}{q_3 - q_1}$$

Note que

- $B \in [-1, 1]$;
- existe assimetria positiva ou à direita $\iff q_2 - q_1 < q_3 - q_2 \iff B > 0$;
- existe assimetria negativa ou à esquerda $\iff q_2 - q_1 > q_3 - q_2 \iff B < 0$;
- a variável é simétrica se $B \approx 0$.

## Exemplos

- No exemplo 1,

$$B = \frac{q_3 - 2 \cdot q_2 + q_1}{q_3 - q_1} = \frac{9,5 - 2 \cdot 9,21 + 8,53}{0,97} = -0.40;$$

- No exemplo 2,

$$B = \frac{q_3 - 2 \cdot q_2 + q_1}{q_3 - q_1} = \frac{7,03 - 2 \cdot 6,08 + 5,71}{1,32} = 0,44.$$