Variável aleatória discreta

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Da amostra para a população: variável quantitativa discreta

Objetivo

Atribuir probabilidades para valores de uma variável quantitativa discreta usando a teoria de probabilidades.

Seja X uma variável quantitiva discreta em amostra de tamanho n com tabela de distribuição dada por

Tabela 1: Tabela de distribuição de frequência para uma variável quantitativa discreta

X	frequência	frequência relativa	porcentagem
x_1	n_1	$f_1 = n_1/n$	$100 \cdot f_1\%$
x_2	n_2	$f_2 = n_2/n$	$100 \cdot f_2\%$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	$f_k = n_k/n$	$100 \cdot f_k\%$
Total	n	1	100

As afirmações usando $f_1, \ldots, f_k$ são válidas apenas para a amostra e, no máximo, são aproximações para a população. Então, a ideia é substituir a frequência relativa f_i pela probabilidade $f(x_i)$ de X ser igual a x_i na população.

Variável aleatória discreta e função de probabilidade

Definição

- Considere um fenômeno aleatório com espaço amostral Ω e probabilidade $P(\cdot)$;
- $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ é chamada de variável aleatória discreta;
- Suponha que os valores possível dessa variável é $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\}$. A função dada por

$$\begin{aligned} f(x_i) &= P(X = x_i) \\ &= P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}, \end{aligned}$$

  é chamada de função de probabilidade.

Observações

- O conjunto de todos os valores possíveis de uma variável aleatória discreta X é chamada de suporte e usamos a notação $\chi = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$.
- Em situações práticas, não nos preocupamos com o espaço amostral Ω, e focamos nossa atenção em estabelecer o suporte e a função de probabilidade da variável aleatória discreta.

Propriedades da função de probabilidade

Note que

- $0 \leq f(x_i) \leq 1$;
- $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \cdots = 1$.

Para caracterizar uma variável aleatória discreta, precisamos estabelecer:

- valores possíveis da variável aleatória discreta $x_1, x_2, x_3, \ldots$;
- A função de probabilidade para cada valor possível da variável aleatória discreta.

Seja $B \subset \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, então

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} f(x)$$

Função de distribuição acumulada

Uma outra abordagem para calcular probabilidades de uma variável aleatória é usar somas acumuladas.

Função de Distribuição Acumulada

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(\lfloor x \rfloor) \end{aligned}$$

em que $\lfloor x \rfloor$ é a função “arrendonda x para baixo”.

Para especificar completamente uma variável aleatória discreta precisamos estabelecer

1. o suporte da variável aleatória discreta;
2. a função de probabilidade ou a função de distribuição acumulada.

Note que podemos derivar a função de probabilidade usando a função de distribuição acumulada, e vice-versa.

Exemplo

Considere o fenômeno aleatório que consiste no lançamento de duas moedas “justas” ou “normais”. Qual o espaço amostral? Usando o princípio da equiprobabilidade, qual seria a probabilidade de sair ao menos uma cara? Considere a variável aleatória discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ em que

$$X(\omega) = \text{Número de caras em } \omega.$$

Encontre a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.

Solução: Note que o espaço amostral desse fenômeno aleatório é $\Omega = \{cc, kc, ck, kk\}$, em que c representa cara e k representa coroa. Então, usando o princípio da equiprobabilidade, temos que

ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$
cc	$1/4 = 0,25$	2
kc	$1/4 = 0,25$	1
ck	$1/4 = 0,25$	1
kk	$1/4 = 0,25$	0

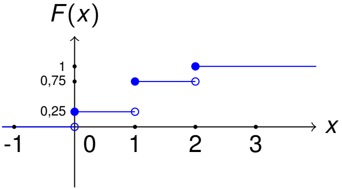
Ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = P(\{kk\}) = 1/4 = 0,25, \\ f(1) &= P(X = 1) = P(\{ck, kc\}) = 2/4 = 0,5, \\ f(2) &= P(X = 2) = P(\{cc\}) = 1/4 = 0,25. \end{aligned}$$

Note que o suporte da variável aleatória X é $\chi = \{0, 1, 2\}$.

Exemplo – continuação

- Para $x < 0$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x < 0\}\right) = P(\emptyset) = 0;$$
- Para $0 \leq x < 1$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) = 0,25;$$
- Para $1 \leq x < 2$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) + f(1) = 0,25 + 0,5 = 0,75;$$
- Para $x \geq 2$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) + f(1) + f(2) = 1.$$



Exemplo

Uma população de 1000 crianças foram analisadas num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam uma outra dose de vacina. Ao fim de 5 doses, todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela abaixo:

Doses	1	2	3	4	5
Frequência	245	288	256	145	66

Supondo que uma criança dessa população sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela receber no máximo duas doses? Considere a variável aleatória discreta X descrita por

$$X(\omega) = \text{Número de doses que a criança } \omega \text{ recebeu.}$$

Encontre a função de probabilidade e da função de distribuição acumulada.

Exemplo – solução

Note que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e usando o princípio da equiprobabilidade, temos que

ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$
1	$^{245}/_{1000} = 0,245$	1
2	$^{288}/_{1000} = 0,288$	2
3	$^{256}/_{1000} = 0,256$	3
4	$^{145}/_{1000} = 0,145$	4
5	$^{66}/_{1000} = 0,066$	5

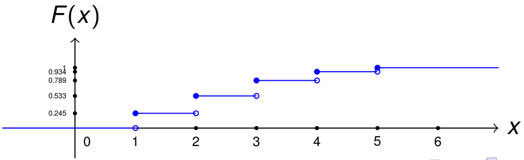
Então, a função de probabilidade é dada por

$$
\begin{aligned}
f(1) &= P(X = 1) = P(\{1\}) = 0,245\\
f(2) &= P(X = 2) = P(\{2\}) = 0,288\\
f(3) &= P(X = 3) = P(\{3\}) = 0,256\\
f(4) &= P(X = 4) = P(\{4\}) = 0,145\\
f(5) &= P(X = 5) = P(\{5\}) = 0,066
\end{aligned}
$$

Exemplo – continuação

Para encontrar a função de distribuição acumulada, precisamos dividir em casos:

- Para $x < 1$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x < 1\}\right) = P(\emptyset) = 0;$$
- Para $1 \leq x < 2$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(1) = 0,245;$$
- Para $2 \leq x < 3$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(1) + f(2) = 0,245 + 0,288 = 0,533;$$
- Para $3 \leq x < 4$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(1) + f(2) + f(3) = 0,245 + 0,288 + 0,256 = 0,789;$$
- Para $4 \leq x < 5$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0,245 + 0,288 + 0,256 + 0,145 = 0,934;$$
- Para $x \geq 5$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1.$$



Modelos uniforme discreto

Motivação

Algumas variáveis e quantidades aparecem com frequência e a literatura estatística já estabeleceu funções de probabilidade e funções de distribuição acumulada.

Modelo uniforme discreto

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores $j, \ldots, k$. Dizemos que X segue o modelo uniforme discreto se cada um dos valores $j, \ldots, k$ tem função de probabilidade $\frac{1}{k-j+1}$. Ou seja, a função de probabilidade de X é dada por

$$f(i) = \frac{1}{k-j+1}, \quad i = j, \ldots, k.$$

Notação: $X \sim U_D[j, k]$.

Exemplo

Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25 e meu colega tem outros 5 bilhetes com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem mais chance de ganhar?

Solução: Seja X a variável aleatória discreta que é um número sorteado. Então, $X \sim U_D[1, 100]$, e temos as seguintes probabilidades

- Probabilidade de ter comprado um bilhete premiado:

$$\begin{aligned} P(X \in \{21, 22, 23, 24, 25\}) &= f(21) + f(22) + f(23) + f(24) + f(25) \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100} \\ &= \frac{1}{20} = 0,05. \end{aligned}$$

- Probabilidade do meu amigo ter comprado um bilhete premiado:

$$\begin{aligned} P(X \in \{1, 11, 29, 69, 93\}) &= f(1) + f(11) + f(29) + f(69) + f(93) \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100} \\ &= \frac{1}{20} = 0,05. \end{aligned}$$

Modelo Bernoulli

Ensaios de Bernoulli são fenômenos aleatórios com 2 resultados possíveis, chamados de sucesso e fracasso. A variável X que atribui 1 ao sucesso e zero ao fracasso é chamado de modelo Bernoulli. Mais precisamente, seja p a probabilidade de sucesso, então a função de probabilidade de X é dada por

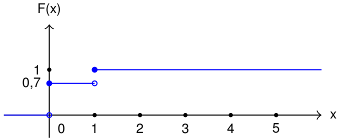
$$f(1) = p;$$
$$f(0) = 1 - p.$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

Exemplo

Assuma que a prevalência de infecção pelo vírus HIV em país da África Subsariana seja 30%. Considere o fenômeno aleatório que consiste de prever se um novo paciente está infectado. Qual o modelo probabilístico adequado neste contexto? Qual a função de probabilidade? Qual a função de distribuição acumulada?
Solução: Considere sucesso o paciente estar infectado com o vírus HIV. Então, temos um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso $0,3$, e a variável aleatória discreta associada é $X \sim \mathit{Bernoulli}(0,3)$.
O suporte para X é $\chi = \{0,1\}$, e a função de probabilidade é $f(0) = 1 - 0,3 = 0,7$ e $f(1) = 0,3$.
A função de distribuição acumulada para

- $x < 0$ é $F(x) = P(X \leq x < 0) = 0$
- $0 \leq x < 1$ é $F(x) = P(X \leq x) = f(0) = 0,7$;
- $x \geq 1$ é $F(x) = 1$.



Modelos binomial

Considere o fenômeno aleatório que consiste da repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada de modelo binomial com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

em que $\binom{n}{k}$ é chamado de coeficiente binomial e é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

em que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$.
Notação: $X \sim b(n, p)$.

Exemplo

Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de três indivíduos é sorteado dentre a população vacinada e submetido a testes para averiguar se a imunização foi efetivada. Qual o modelo adequado para este fenômeno aleatório? Encontre a função de probabilidade e a fução de distribuição acumulada.

Solução: Considere sucesso a imunização do indivíduo, então temos três repetições de um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso $0,8$. Ou seja, a variável X, número de indivíduos imunizados, tem distribuição binomial com parâmetros $n = 3$ e $p = 0,8$.

O suporte de X é $\chi = \{0, 1, 2, 3\}$ e a função de probabilidade é dada por

$$f(0) = \binom{3}{0} 0,8^0 (1 - 0,8)^3 = 0,08$$

$$f(1) = \binom{3}{1} 0,8^1 (1 - 0,8)^2 = 0,096$$

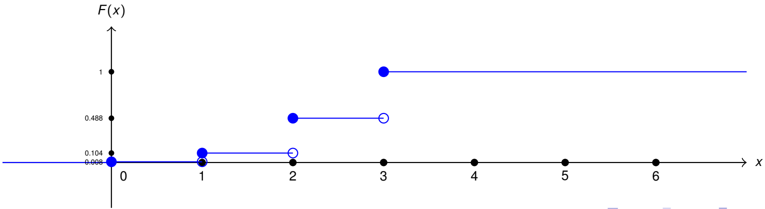
$$f(2) = \binom{3}{2} 0,8^2 (0 - 0,8)^1 = 0,384$$

$$f(3) = \binom{3}{3} 0,8^3 (0 - 0,8)^0 = 0,512$$

Exemplo – continuação

Para encontrar a função de distribuição acumulada, precisamos dividir em casos:

- Para $x < 0$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x < 0\}\right) = P(\emptyset) = 0;$$
- Para $0 \leq x < 1$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) = 0,08;$$
- Para $1 \leq x < 2$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) + f(1) = 0,08 + 0,096 = 0,104;$$
- Para $2 \leq x < 3$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,08 + 0,096 + 0,384 = 0,488;$$
- Para $x \geq 3$, temos que
$$F(x) = P(X \leq x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0,08 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1;$$



Modelo Poison

Modelo utilizado em fenômenos aleatórios que consistem contar o número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo. Neste modelo, λ é a frequência média ou esperada de ocorrências do evento no intervalo de tempo. A variável aleatória discreta X, número de ocorrências no intervalo de tempo, tem distribuição de Poison com parâmetro $\lambda > 0$, e sua função de probabilidade é dada por

$$f(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Notação: $X \sim Poison(\lambda)$.

Exemplo

Suponha que uma unidade básica de saúde de um bairro de classe média realiza em média 10 atendimentos em dias de segunda-feira. Qual a probabilidade desta UBS atender, na próxima segunda-feira, no máximo 5 cidadãos?

Solução: Note que estamos contando o número de atendimentos (ocorrência=atendimento) em um dia de semana (intervalo de tempo = segunda-feira). Então, a variável aleatória discreta X, número de atendimentos em segunda-feira, tem distribuição Poison com média $\lambda = 10$. Então,

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 5) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \\
&= \frac{e^{-10}10^0}{0!} + \frac{e^{-10}10^1}{1!} + \frac{e^{-10}10^2}{2!} + \frac{e^{-10}10^3}{3!} + \frac{e^{-10}10^4}{4!} + \frac{e^{-10}10^5}{5!} \\
&= 0,07
\end{aligned}
$$

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta com suporte $\chi = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ e com função de probabilidade $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ Então,

- A média ou valor esperado ou esperança matemática de X é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + x_3 \cdot f(x_3) + \cdots \\ &= \mu; \end{aligned}$$

- A variância de X é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x) &= (x_1 - \mu)^2 \cdot f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot f(x_2) + (x_3 - \mu)^3 \cdot f(x_3) + \cdots \\ &= \sigma^2; \end{aligned}$$

- Para manter a mesma unidade da variável aleatória discreta, usamos o desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{\sigma^2}$$

- A mediana de X é um valor Md tal que

$$P(X \geq Md) \geq 0,5 \text{ e } P(X \leq Md) \geq 0,5;$$

- A moda de X é valor x_i com maior valor de $f(x_i)$.

Exemplo

Uma pequena cirurgia dentária pode ser realizada por dois métodos diferentes cujos tempos de recuperação (em dias) são modeladas pelas variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2. Admita que as funções de probabilidade são dadas por

Funções de probabilidade.

x	0	4	5	6	10
$f(x)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Tabela 2: Método 1.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,4	0,15	0,15	0,15	0,15

Tabela 3: Método 2.

Calcule a média, a variância, a mediana e a moda para cada uma das variáveis. Qual método você recomendaria para um paciente que precis fazer esta cirurgia dentária?

Exemplo – solução

Método 1

- **Média** $\mu = 0 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 = 5$
- **Mediana** Note que $P(md \leq 5) = 0,6 \geq 0,5$ e $P(md \geq 5) = 0,6 \geq 0,5$
- **Moda** $Mo = \{0, 4, 5, 6, 10\}$
- **Variância** $\sigma^2 = (0-5)^2 f(0) + (4-5)^2 f(4) + (5-5)^2 f(5) + (6-5)^2 f(6) + (10-5)^2 f(10) = 10,4$
- **Desvio Padrão** $\sigma = \sqrt{10,4} = 3,22$

Método 2

- **Média** $\mu = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,15 = 2,5$
- **Mediana** Note que $P(md \leq 2) = 0,55 \geq 0,5$ e $P(md \geq 2) = 0,6 \geq 0,5$
- **Moda** $Mo = 0$
- **Variância** $\sigma^2 = (1-2,5)^2 f(1) + (2-2,5)^2 f(2) + (3-2,5)^2 f(3) + (4-2,5)^2 f(4) + (5-2,5)^2 f(5) = 2,25$
- **Desvio Padrão** $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$

Note que a média, a moda ou a mediana é menor para o método 2. Além disso, a variância e o desvio padrão para o segundo método também é menor, ou seja, a incerteza de quantos dias o paciente estará recuperado é menor para o método 2. Logo, deveríamos indicar o segundo método para o paciente.