

# Estimação pontual e intervalo de confiança

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia  
Instituto de Matemática e Estatística  
Departamento de Estatística

**Tabela 1:** Encontrar o valor do parâmetro dos modelos de probabilidade.Seja  $x_1, \dots, x_m$  os valores observados de uma variável quantitativa  $X$  em uma amostra, então:

Amostra	Distribuição	Parâmetros	Estimador
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \frac{1}{k - j + 1}, \quad x = j, \dots, k$	$j$ $k$	$\hat{j} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ $\hat{k} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$	$p$ $n$ conhecido	$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{n \cdot m}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$	$p$	$\hat{p} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$	$\lambda$	$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in [a, b]$	$a$ $b$	$\hat{a} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ $\hat{b} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \quad x \geq 0$	$\alpha$	$\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{m}{x_1 + x_2 + \dots + x_m}$
$X_1, \dots, X_m$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\mu, \sigma^2$	$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + (x_2 - \hat{\mu})^2 + \dots + (x_m - \hat{\mu})^2}{m - 1}$

## Exemplo – Bernoulli

Um pesquisador está interessado em estudar a prevalência de um certa patologia. Para isso, ele coletou uma amostra em três etapas:

- 1 Na primeira etapa, ele coletou 5 pacientes e dois estavam infectados;
- 2 Na segunda etapa, ele coletou 8 pacientes e 4 estavam infectados;
- 3 Na terceira etapa, ele coletou 10 pacientes e 3 estavam infectados.

Qual a prevalência desta patologia na população?

**Solução:** Nesse caso, temos que

- Sucesso: o paciente estar infectado;
- Probabilidade de sucesso: é a prevalência e precisamos estimar.

Neste caso, temos uma variável aleatória com Distribuição Bernoulli. O tamanho final da amostra é  $n = 5 + 8 + 10 = 23$  e número de sucessos foi  $2 + 4 + 3 = 9$ , então a prevalência é aproximada por

$$\hat{p} = \frac{9}{23} = 0,39.$$

## Exemplo – Exponencial

Um profissional de saúde acompanhou 15 pacientes com certa patologia em estado avançado e observou o tempo em dias até o óbito obtendo os valores da tabela 2.

Tempo até o óbito	80	327	95	146	3	82	4	1152	226	173
-------------------	----	-----	----	-----	---	----	---	------	-----	-----

**Tabela 2:** Tempo (em dias) até óbito.

Qual o modelo de probabilidade adequado neste contexto? Qual o parâmetro da distribuição que você escolheu? Qual um paciente em estado crítico com esta patologia viver mais de 180 dias?

**Solução:** O tempo até um evento (o óbito nesse caso) é modelado usando a distribuição exponencial. O tempo médio até o óbito é

$$\bar{x} = \frac{80 + 327 + 95 + 146 + 3 + 82 + 4 + 1152 + 226 + 173}{10} = 228,8,$$

e a taxa do modelo exponencial é aproximada por  $\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{228,8} = 0,004$ .

A probabilidade de um paciente em estado crítico sobreviver mais de 180 dias é

$$\begin{aligned} P(X \geq 180) &= 1 - P(X < 180) \\ &= 1 - (1 - \exp(-0.004 \cdot 180)) \\ &= \exp(-0,004 \cdot 180) \\ &= 0,49. \end{aligned}$$

## Organização dos intervalos de confiança

### 1 Distribuição normal:

- 1 Intervalo de confiança para média quando variância é conhecida (intervalos  $Z$ );
- 2 Intervalo de confiança para média quando variância é desconhecida (intervalos  $t$ );
- 3 Intervalo de confiança para variância;

### 2 Distribuição exponencial:

- 1 Intervalo de confiança para o tempo médio de vida ou duração;

### 3 Grandes amostras (tamanho da amostra $\geq 40$ ):

- 1 Intervalo de confiança para proporção para distribuição Bernoulli;
- 2 Intervalo de confiança para outras distribuições.

# Estimação intervalar para média $\mu$

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecida

### Objetivo

Agora queremos encontrar um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro  $\mu$ , ou seja, queremos encontrar  $a$  e  $b$  tal que  $a < \mu < b$  com uma medida de *precaução ou prudência*  $\gamma$ , ou seja, se repetirmos o experimento ou a amostragem, 95% das amostras produzirão um intervalo que contém o parâmetro.

Chamamos  $(a, b)$  de intervalo de confiança e acreditamos que este intervalo está correto com uma medida de *precaução ou prudência*  $\gamma$ . Chamamos  $\gamma$  de coeficiente de confiança.

Suponha que você conhece o desvio padrão  $\sigma$  populacional da variável aleatória contínua  $X$  com distribuição normal. Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  da variável  $X$ , então o intervalo de confiança para a média populacional  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$$

em que  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\gamma+1}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . Algumas vezes, usamos a notação  $\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

## Interpretação do coeficiente de confiança

Gostaríamos de reforçar que o intervalo de confiança é um processo de generalização de uma amostra para toda população. Existe uma possibilidade dessa generalização estar errada como ilustrado na Tabela 3.

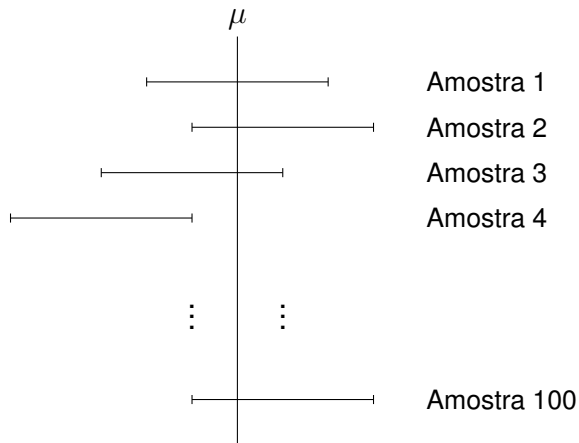
**Tabela 3:** Intervalos de confiança e amostras de uma população com distribuição normal com média populacional  $\mu = 1,75$  e desvio padrão  $\sigma = 0,1$ .

$\mu$		Amostra					a	b	$a < \mu < b?$
1,75	Amostra 1	2,050	1,909	1,893	1,858	1,651	1,785	1,960	Não
	Amostra 2	1,667	1,909	1,958	1,771	2,028	1,779	1,954	Não
	Amostra 3	1,835	1,905	1,995	1,805	1,820	1,784	1,960	Não
$\sigma$	Amostra 4	1,824	1,870	1,965	1,637	1,711	1,714	1,889	Sim
	Amostra 5	1,773	1,796	1,895	1,872	1,812	1,742	1,917	Sim
0,1	Amostra 6	1,741	1,885	1,896	1,629	1,664	1,675	1,851	Sim

Na Tabela 3, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = 0,95$  pode ou não conter a média populacional. **O importante é que 95% dos intervalos de confiança vão conter a média populacional já que  $\gamma = 0,95$ .** Ou seja, de 100 intervalos de confianças de distintas amostras, aproximadamente 95 intervalos vão conter a média populacional. Ilustramos esta ideia na Figura 1.

# Interpretação do coeficiente de confiança

**Figura 1:** Interpretação do coeficiente de confiança.





## Exemplo

Suponha que os comprimentos de jacarés de um certa raça tenham variância  $\sigma^2 = 0,01m^2$ . Uma amostra de dez animais foi coletada e forneceu uma média de  $1,69m$ . Construa um intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = 0,95$ . Construa um intervalo de confiança para a média da população de jacarés com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ .

## Solução:

- Para  $\gamma = 95\%$ . Primeiramente precisamos encontrar  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ , ou seja,  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ .

Logo  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ . Então, o intervalo de confiança para a altura média do jacaré é

$$IC(\mu, 95\%) = \left( -1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69; 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69 \right) = (1,63; 1,75).$$

Ou seja, com coeficiente de confiança 95%, a altura média do jacaré está entre  $1,63m$  e  $1,75m$ .

- Para  $\gamma = 99\%$ . Primeiramente precisamos encontrar  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ , ou seja,  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2} = 0,995$  e  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ . Então, o intervalo de confiança para a altura média do jacaré é

$$IC(\mu, 95\%) = \left( -2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69; 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69 \right) = (1,60; 1,77).$$

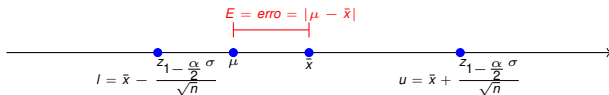
Ou seja, com coeficiente de confiança 99%, a altura média do jacaré está entre  $1,60m$  e  $1,77m$ .

## Escolha do tamanho da amostra

### Precisão da estimativa

Quando usamos  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  para aproximar  $\mu$ , o erro  $E = |\bar{x} - \mu|$  é menor ou igual a  $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 100(1 - \alpha)\%$ , conforme ilustrado na Figura 2.

**Figura 2:** Erro quando usamos  $\bar{x}$  para aproximar  $\mu$



Note que  $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$  aumenta quando aumentamos  $\gamma$  (ou diminuimos  $\alpha$ ). Dizemos que  $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$  é a precisão da estimativa de  $\mu$ .

### Tamanho da amostra

Quando conhecemos o desvio padrão  $\sigma$  da população de distribuição normal e fixamos  $\gamma = 1 - \alpha$ , então, para ter um erro máximo de  $E$  ao aproximar  $\mu$  por  $\bar{x}$ , o tamanho da amostra precisa ter no mínimo

$$n = \left\lceil \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2 \right\rceil,$$

em que  $\lceil x \rceil$  é “ $x$  é o primeiro inteiro depois de  $x$ ” e  $E$  é o erro máximo tolerável especificado pelo pesquisador.

## Escolha do tamanho da amostra

### Exemplo

Uma fábrica de automóveis tem uma linha de produção que produz pistões com diâmetro que tem distribuição normal com desvio padrão  $\sigma = 3\text{cm}$ . Qual o tamanho da amostra para termos um erro máximo de  $0.5\text{cm}$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$  ao aproximarmos  $\mu$ ?

### Solução

Primeiro encontramos o quantil da distribuição normal  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ , ou seja,  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ , então

$$\begin{aligned}n &= \left\lceil \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2 \right\rceil \\&= \left\lceil \left( \frac{2,58 \cdot 3}{1} \right)^2 \right\rceil \\&= 240.\end{aligned}$$

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$

### Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecida

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média  $\mu$  e variância conhecida  $\sigma^2$ .

#### Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

em que  $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ .

#### Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que  $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$ .

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$

### Exemplo

Um engenheiro civil está analisando a força compressiva de um concreto. De estudos anteriores, a força compressiva é normalmente distribuída com variância  $\sigma^2 = 1000(\text{psi})^2$ . Uma amostra com 12 espécimes tem média  $\bar{x} = 3250\text{psi}$ . Ache um limite inferior para a força compressiva com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ .

### Solução

Primeiro precisamos achar o quantil da distribuição normal  $\Phi(z_\alpha) = \alpha = 0,01$ . Usando a tabela da distribuição normal, temos que  $z_\alpha = -2,33$ , e o intervalo unilateral para  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$  é dado por:

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left( \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty \right) \\ &= \left( 3250 - 2,33 \cdot \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}; \infty \right) \\ &= (3228,73; \infty) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança de 99%, a média populacional da força compressiva é no mínimo 3228,73psi.

## Estimação intervalar para média $\mu$ Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecida

Suponha que você sabe que a variável contínua  $X$  com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão  $\sigma$ . Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  da variável  $X$  com média

$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  e variância amostral  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ , então a distribuição amostral de

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S},$$

segue um modelo probabilidade que chamamos  $t$ -Student com  $k = n - 1$  graus de liberdade, em que a função densidade é dada por

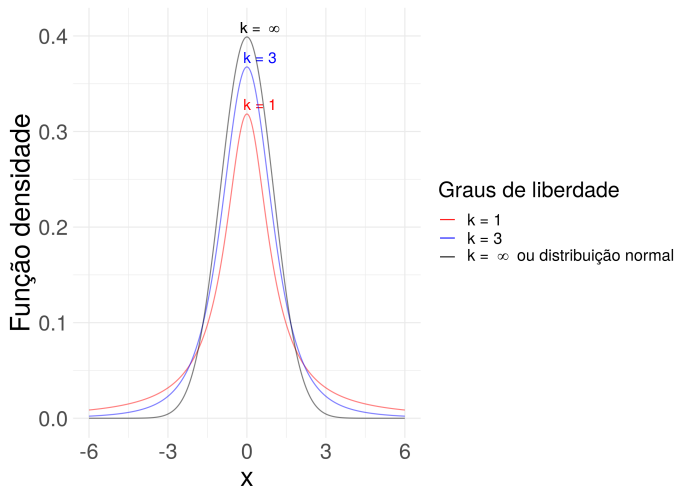
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\left[\Gamma\left(\left(\frac{x^2}{k}\right)^2 + 1\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A ideia é que, ao substituirmos  $\sigma$  por  $s$ , precisamos considerar a incerteza de usar  $s$  ao invés de  $\sigma$  e valores mais afastados de  $\mu$  são mais prováveis para  $T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S}$  do que para  $\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$ .

# Estimação intervalar para média $\mu$

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecida

Figura 3: Distribuição t-Student e normal.



## Estimação intervalar para média $\mu$ Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecida

Suponha que você sabe que a variável contínua  $X$  com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão  $\sigma$ . Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  da variável  $X$  com média  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  e variância  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ , então o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  é dada por

$$IC(\mu, \gamma) = \left( \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , em que  $t_{n-1}$  é a distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.



## Estimação intervalar para média $\mu$ Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecida

### Exemplo

A força de compressão de um concreto é normalmente distribuída e um engenheiro civil precisa encontrar um intervalo de confiança para a força de compressão média e para isso coletou uma amostra com 12 espécimes de concreto e obteve a seguinte amostra: 2216, 2237, 2249, 2204, 2225, 2301, 2281, 2263, 2318, 2255, 2275, 2295. Use o coeficiente de confiança  $\gamma = 0.99$ .

### Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  com graus de liberdade através de  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}) = P(t_{11} \leq t_{0,995;11}) = 0,995$ , então  $t_{0,995;11} = 3,106$ . A média e o desvio padrão são dadas por

$$\bar{x} = 2259,917 \text{ e } s = 35,56929.$$

E o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = 0.99$  é

$$\begin{aligned} IC(\mu, 99\%) &= \left( \bar{x} - t_{0,995;11} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{0,995;11} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \left( 2259,917 - 3,106 \cdot \frac{35,56929}{\sqrt{12}}; 2259,917 + 3,106 \cdot \frac{35,56929}{\sqrt{12}} \right) \\ &= (2228,024; 2291,809) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , a média populacional da força compressiva está entre 2228,024psi e 2291,809psi.

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$ Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecida

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média  $\mu$  e variância desconhecida  $\sigma^2$  e variância amostral  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ .

### Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha; n-1}) = 1 - \alpha$ , em que  $t_{n-1}$  é uma variável aleatória com distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

### Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} - t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha; n-1}) = \alpha$ , em que  $t_{n-1}$  é uma variável aleatória com distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$

### Exemplo

Uma marca de margarina foi analisada para determinar o nível (em porcentagem) de ácido graxo poliinsaturado. De estudos anteriores, os pesquisadores podem assumir a normalidade dos dados. Seis potes de margarina desta marca foi coletada com os seguintes níveis (em porcentagem) de ácido graxo poliinsaturado: 6,8; 17,2; 17,4; 16,9; 16,5; 17,1. Encontre um limite inferior para a porcentagem média de ácido graxo poliinsaturado com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ .

### Solução

A média e o desvio padrão são dados por

$$\bar{x} = 16,98 \quad s = 0,32,$$

e o quantil  $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}) = P(t_5 \leq t_{\alpha;5}) = 5\%$  da distribuição  $t$ -Student  $k = n - 1 = 5$ , ou seja,  $t_{0,05;5} = -2,015$ . Então,

$$\begin{aligned} IC(\mu, 95\%) &= \left( \bar{x} + t_{\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \infty \right) \\ &= \left( 16,98 - 2,015 \cdot \frac{0,32}{\sqrt{6}}; \infty \right) \\ &= (16,71; \infty). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ , a média populacional da porcentagem de ácido graxo poliinsaturado nos potes de margarina é no mínimo 16,71.

## Estimação intervalar para $\sigma^2$

### Distribuição normal

#### Distribuição Qui-quadrado

Imagine que temos uma amostra  $x_1, \dots, x_n$  de uma variável aleatória contínua  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , e considere a variância amostral  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ . Então a quantidade

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2},$$

tem distribuição amostral que chamamos de *qui-quadrado* com  $k = n - 1 > 0$  graus de liberdade.

Função densidade de probabilidade da distribuição qui-quadrado com  $k > 0$  graus de liberdade:

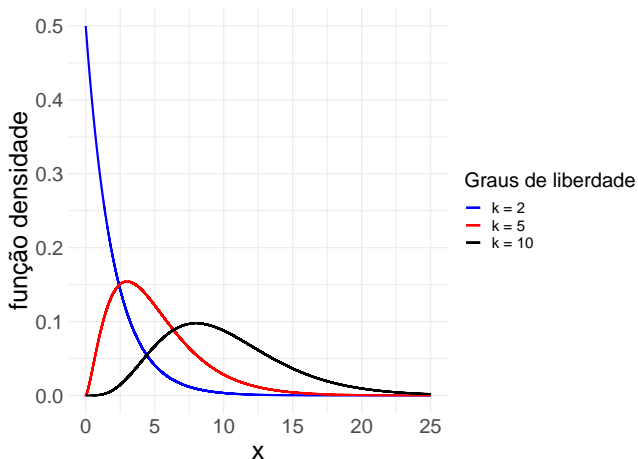
$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0.$$

$$\mu = k \text{ e } \sigma^2 = 2k.$$

# Estimação intervalar para $\sigma^2$

## Distribuição normal

Figura 4: Função de densidade.



## Estimação intervalar para $\sigma^2$

### Distribuição normal

Suponha que você sabe que a variável aleatória contínua  $X$  com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão  $\sigma$ . Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  da variável  $X$  com média  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  e variância  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ , então o intervalo de confiança para  $\sigma^2$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  é dada por

$$IC(\sigma^2, \gamma) = \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2} \right)$$

em que  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , em que  $\chi_{n-1}^2$  é a distribuição qui-quadrado com  $n-1$  graus de liberdade.

## Intervalo de confiança para $\sigma^2$

### Exemplo

Um rebite está sendo construído para ser inserido em um buraco. Uma amostra aleatória com  $n = 15$  peças é selecionada, e o diâmetros dos buracos foram medidos. O desvio padrão amostral é dado por  $s = 0,008ml$ . Construa o intervalo de confiança para  $\sigma^2$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ .

### Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição qui-quadrado  $\chi_{n-1}^2 = \chi_{15-1}^2 = \chi_{14}^2$ .

- $P\left(\chi_{14}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2};14}^2\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005$  e  $\chi_{0,005;14}^2 = 4,075$ ;
- $P\left(\chi_{14}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2};14}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995$  e  $\chi_{0,995;14}^2 = 31,319$ .

Então,

$$\begin{aligned} IC(\sigma^2; \gamma) &= \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2};14}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2};14}^2} \right) \\ &= \left( \frac{(15-1)0,008^2}{31,319}; \frac{(15-1)0,008^2}{4,075} \right) \\ &= (0,00003; 0,00022). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , então a variância está entre 0,00003 e 0,00022.

## Intervalo unilateral de confiança para $\sigma^2$

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média  $\mu$ , variância desconhecida  $\sigma^2$  e variância amostral  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ .

### Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para variância é dada por

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha; n-1}^2},$$

em que  $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha; n-1}^2) = \alpha$ , em que  $\chi_{n-1}^2$  é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com  $n - 1$  graus de liberdade.

### Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha; n-1}^2} \leq \sigma^2,$$

em que  $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha; n-1}^2) = 1 - \alpha$ , em que  $\chi_{n-1}^2$  é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com  $n - 1$  graus de liberdade.



## Intervalo unilateral de confiança para $\sigma^2$

### Exemplo

A porcentagem de titânio numa liga de aço usada na construção de naves aeroespaciais tem distribuição normal, e um engenheiro coletou 51 barras de aço com desvio padrão amostral  $s = 0,37$ . Construa um limite superior para o desvio padrão populacional da porcentagem de titânio numa liga de aço com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ .

### Solução

Primeiro encontramos o quantil, ou seja,  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha;n-1}^2\right) = P\left(\chi_{50}^2 \leq \chi_{0,05;50}^2\right) = 0,05$  e  $\chi_{0,05;50}^2 = 34,764$ . Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(\sigma^2; \gamma) &= \left(0; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha;n-1}^2}\right) \\ &= \left(0; \frac{50 \cdot 0,37^2}{34,764}\right) \\ &= (0; 0,197) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ , a variância populacional da porcentagem de titânio na liga de aço é no máximo 0,197.

Estimação intervalar para  $\mu$ 

Suponha que você sabe que a variável contínua  $X$  com distribuição exponencial e não conhecemos a média  $\mu$  e taxa de decaimento  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ . Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  da variável  $X$  com média  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ , é possível provar que a distribuição da quantidade  $2\frac{1}{\mu}n\bar{x}$  tem distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade. Então, o intervalo de confiança para  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = (1 - \alpha)100$ , é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left( \frac{2n\bar{x}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; 2n}^2}; \frac{2n\bar{x}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}; 2n}^2} \right),$$

em que  $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; 2n}^2\right) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\frac{1-\alpha}{2}; 2n}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , em que  $\chi_{2n}^2$  tem distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade.

# Estimação intervalar para $\mu$

## Exemplo

Um fabricante de lâmpadas afirma que a duração média, pelo menos, 20000 horas. Um consumidor cético comprou 10 lâmpadas e verificou o tempo de vida de cada lâmpada. Os dados obtidos foram: 4272,61; 1464,02; 9765,54; 3308,58; 3237,83; 987,60; 4094,58; 17491,86; 4908,06 e 9403,13. Com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , este consumidor deve acreditar no fabricante de lâmpadas?

## Solução

Primeiro calculamos a média  $\bar{x} = 5893,381$ .

Em seguida, calculamos os quantis da distribuição qui-quadrado:

- $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; 2n}^2\right) = P\left(\chi_{20}^2 \leq \chi_{\frac{0,01}{2}; 20}^2\right) = \frac{0,01}{2}$  e  $\chi_{0,005; 20}^2 = 7,434$ ;
- $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; 2n}^2\right) = P\left(\chi_{20}^2 \leq \chi_{1-\frac{0,01}{2}; 20}^2\right) = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995$  e  $\chi_{0,995; 20}^2 = 39,997$ .

Então, o intervalo de confiança para  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$  é dada por

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left( \frac{2n\bar{x}}{\chi_{0,995; 20}^2}; \frac{2n\bar{x}}{\chi_{0,005; 20}^2} \right) \\ &= \left( \frac{2 \cdot 10 \cdot 5893,381}{39,997}; \frac{2 \cdot 10 \cdot 5893,381}{7,434} \right) \\ &= (2.946,91; 15855,21) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , o tempo médio de duração da lâmpada está entre 2.946,91 e 15855,21 horas.

Intervalo unilateral de confiança para  $\mu$ Distribuição exponencial com média  $\mu$  e taxa de decaimento  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ 

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial com média  $\mu$  e taxa de decaimento  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  e variância amostral  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .

## Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \frac{2n\bar{x}}{\chi_{\alpha;2n}^2},$$

em que  $P(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\alpha;2n}^2) = \alpha$ , em que  $\chi_{2n}^2$  é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade.

## Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\frac{2n\bar{x}}{\chi_{1-\alpha;2n}^2} \leq \mu,$$

em que  $P(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{1-\alpha;2n}^2) = 1 - \alpha$ , em que  $\chi_{2n}^2$  é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade.

Intervalo unilateral de confiança para  $\mu$ Distribuição exponencial com média  $\mu$  e taxa de decaimento  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ 

## Exemplo

Um fabricante afirma que o tempo de vida de um ventilador usado na montagem de computadores *desktop* duram, em média, no mínimo 10.000 horas (conforme especificações de um órgão regulador). Este órgão regulador coletou 50 computadores do mercado e verificou quando tempo cada um dos ventiladores aguentaram e obteve uma média de 1953,063 horas. Ao nível de significância  $\gamma = 90\%$ , o fabricante está cumprindo as especificações do regulador?

## Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição qui-quadrado, ou seja,  
 $P(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\alpha; 2n}^2) = P(\chi_{100}^2 \leq \chi_{0,1; 100}^2) = 0,9$  e  $\chi_{0,1; 100}^2 = 82,358$ . Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left( 0; \frac{2n\bar{x}}{\chi_{0,1; 100}^2} \right) \\ &= \left( 0; \frac{2 \cdot 50 \cdot 1953,063}{82,358} \right) \\ &= (0; 2380,536) . \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança com  $\gamma = 90\%$ , a média populacional de tempo de duração dos ventiladores não segue as especificações do regulador.

## Intervalo de confiança para proporção $p$ Amostras grandes e distribuição Bernoulli

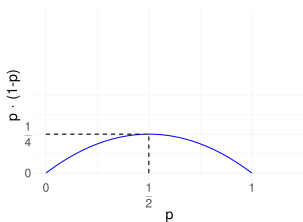
Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de uma distribuição Bernoulli em que  $n \geq 40$ . Podemos aproximar a proporção  $p$  por  $\hat{p} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ . Usando o teorema central do limite, temos que a quantidade  $\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{p \cdot (1-p)}$  tem distribuição normal padrão  $N(0, 1)$ . Então o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$  seria dado por

$$IC(p; \gamma) = \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{p \cdot (1-p)}{\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{p \cdot (1-p)}{\sqrt{n}} + \hat{p} \right).$$

em que  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . Note que  $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$ , conforme ilustrado na Figura 5, e então

$$IC(p; \gamma) = \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \right).$$

**Figura 5:** Ilustração da desigualdade  $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$ .



## Intervalo de confiança para proporção $p$ Amostras grandes e distribuição Bernoulli

### Exemplo

Uma equipe de qualidade quer determinar a proporção de circuitos integrados defeituosos produzidos por uma linha de produção. Uma amostra com 300 circuitos é testada com 13 circuitos defeituosos. Construa um intervalo de confiança para a proporção de circuitos defeituosos usando coeficiente de confiança  $\gamma = 90\%$ .

### Solução

Primeiramente, calculamos a proporção de circuitos defeituosos:  $\hat{p} = \frac{13}{300} = 0,043$ .  
Em seguida, encontramos o quantil da distribuição normal:  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$  e  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,65$ .  
Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(p; \gamma) &= \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \right) \\ &= \left( -1,65 \frac{1}{2\sqrt{300}} + 0,043; 1,65 \frac{1}{2\sqrt{300}} + 0,043 \right) \\ &= (-0,005; 0,091) = (0; 0,091). \end{aligned}$$

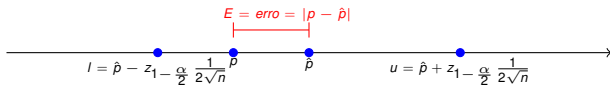
Ou seja, com coeficiente de confiança 90%, a proporção de circuitos integrados defeituosos está entre 0 e 0,091.

# Escolha do tamanho da amostra

## Precisão da estimativa

Quando usamos  $\hat{p} = \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  para aproximar  $p$ , o erro  $E = |\hat{p} - p|$  é menor ou igual a  $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 100(1 - \alpha)\%$ , conforme ilustrado na Figura 6.

**Figura 6:** Erro quando usamos  $\hat{p}$  para aproximar  $p$



Note que  $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$  aumenta quando aumentamos  $\gamma$  (ou diminuimos  $\alpha$ ). Dizemos que  $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$  é a precisão da estimativa de  $p$ .

## Tamanho da amostra

Quando fixamos  $\gamma = 1 - \alpha$ , então, para ter um erro máximo de  $E$  ao aproximar  $p$  por  $\hat{p}$ , o tamanho da amostra precisa ter no mínimo

$$n = \left\lceil \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2E} \right)^2 \right\rceil,$$

em que  $\lceil x \rceil$  é "x é o primeiro inteiro depois de x" e  $E$  é o erro máximo tolerável especificado pelo pesquisador. Note que  $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .



## Escolha do tamanho da amostra

### Exemplo

Um revendedor afirma que, em um pacote de sementes de alface, 95% das sementes germinarão. Com coeficiente de confiança 99%, qual o número mínimo de sementes que um órgão regulador precisa plantar para checar essa afirmação com erro máximo  $E = 1\%$ ?

### Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição normal padrão

$\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,995}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$  e  $z_{0,995} = 2,58$ . Então, o tamanho mínimo da amostra é dada por:

$$\begin{aligned}n &= \left\lceil \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2E} \right)^2 \right\rceil \\&= \left\lceil \left( \frac{2,58}{2 \cdot 0,01} \right)^2 \right\rceil \\&= \lceil 16,641 \rceil = 17.\end{aligned}$$

Com coeficiente de confiança 95% e erro máximo  $E = 0,01$ , o tamanho mínimo de amostra é  $\max(17, 40) = 40$  sementes.

## Intervalo unilateral de confiança para $p$ Amostras grandes e distribuição Bernoulli

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória discreta com distribuição Bernoulli com proporção de sucesso  $p$ , em que  $n \geq 40$ .

### Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para proporção é dada por

$$p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

em que  $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ , em que  $\hat{p} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .

### Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para proporção é dada por

$$z_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \leq p,$$

em que  $\Phi(z_\alpha) = \alpha$ , em que  $\hat{p} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .

## Intervalo unilateral de confiança para $p$

### Amostras grandes e distribuição Bernoulli

#### Exemplo

O governo federal afirma que no mínimo 40% dos poços artesanais da região nordeste tem água salobra. Um pesquisador da UFBA decide verificar essa afirmação, e analisou a água de 400 poços artesanais em diversos estados da região nordeste e 63 tiveram água salobra. Com coeficiente de confiança  $\gamma = 90\%$ , qual a proporção máxima de poços artesanais com água salobra na região nordeste? O pesquisador concorda com o governo federal com coeficiente de confiança  $\gamma = 90\%$ ?

#### Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição normal padrão  $\Phi(z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{0,90}) = 1 - \alpha = 0,90$  e  $z_{0,90} = 1,29$ .

A proporção de poços com água salobra é  $\hat{p} = \frac{63}{400} = 0,16$ . Então, a proporção máxima de poços artesanais com água salobra é

$$\begin{aligned} IC(p, \gamma) &= \left( 0; \hat{p} + z_{1-\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) \\ &= \left( 0; 0,16 + 1,29 \cdot \frac{1}{2 \cdot 20} \right) \\ &= (0; 0,1923). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 90\%$ , a proporção de poços artesanais é no máximo 19,23%. Ou seja, o pesquisador da UFBA discorda do governo federal e acredita que a proporção de poços artesanais é bem menor (no máximo 19,23%) com coeficiente de confiança  $\gamma = 90\%$ .

## Intervalo de confiança para $\mu$ Amostras grandes e outras distribuições

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  de uma variável aleatória  $X$  com média  $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  e  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ , em que  $n \geq 40$ . Então, o intervalo de confiança para  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$  é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left( \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , em que  $t_{n-1}$  tem distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

## Intervalo de confiança para $\mu$ Amostras grandes e outras distribuições

### Exemplo

Imagine uma variável aleatória discreta com suporte  $\chi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  e coletamos uma amostra com 15 valores: 1, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 0 e 2. Construa um intervalo de confiança para média  $\mu$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ .

### Solução

Primeiro calculamos a média e o desvio padrão amostral:  $\bar{x} = 2,13$  e  $s = 2,03$ . Em seguida, encontramos o quantil da distribuição  $t$ -Student com  $n - 1 = 15 - 1 = 14$  graus de liberdade:

$P(t_{14} \leq t_{0,975;14}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$  e  $t_{0,975;14} = 2,145$ . Então o intervalo de confiança para  $\mu$  é dado por

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left( -t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right) \\ &= \left( -t_{0,975;14} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{0,975;14} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right) \\ &= \left( -2,145 \frac{2,03}{\sqrt{15}} + 2,13; 2,145 \frac{2,03}{\sqrt{15}} + 2,13 \right) \\ &= (1,01; 3,25). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ , a média  $\mu$  está entre 1,01 e 3,25.

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$ Amostras grandes e outras distribuições

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória  $X$ , em que  $n \geq 40$ .

### Limite superior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha; n-1}) = 1 - \alpha$ , em que  $t_{n-1}$  é a distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

### Limite inferior de confiança

Ao nível de significância  $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ , o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} + t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que  $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha; n-1}) = \alpha$ , em que  $t_{n-1}$  é a distribuição  $t$ -Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

## Intervalo unilateral de confiança para $\mu$ Amostras grandes e outras distribuições

### Exemplo

Um gerente de uma central de *call center* está interessado em estimar o número máximo, em média, de chamadas que a central recebe. Com esse fim, o gerente contou quantas ligações a central recebeu em 20 dias úteis: 94, 98, 109, 102, 78, 105, 102, 97, 91, 95, 103, 93, 129, 115, 114, 110, 90, 103, 106 e 121. Com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , qual o número máximo, em média, de ligações que a central de *call center* recebe em um dia útil?

### Solução

Primeiro calculamos a média e o desvio padrão amostral:  $\bar{x} = 102,75$  e  $s = 11,72$ . Em seguida, encontramos o quantil da distribuição *t*-Student com  $n - 1 = 20 - 1 = 19$  graus de liberdade:  $P(t_{19} \leq t_{0,99;19}) = 0,99$  e  $t_{0,99;19} = 2,539$ . Então o intervalo de confiança para  $\mu$  é dado por

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left( 0; t_{1-\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right) = \left( 0; t_{0,99;19} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right) \\ &= \left( 0; 2,539 \frac{11,72}{\sqrt{15}} + 102,75 \right) = (0; 109,89). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança  $\gamma = 99\%$ , o número máximo de chamadas que chegam, em média, é 110 chamadas.

## Resumo para construir intervalo de confiança

Distribuição	Parâmetro	Intervalo	Quantil
Normal $\sigma^2$ conhecido	$\mu$	$IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( -\infty; z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$	$\Phi \left( z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$ $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
Normal	$\mu$	$IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( -t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( -\infty; t_{1-\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$	$P \left( t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha; n-1}) = \alpha$ $P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha; n-1}) = 1 - \alpha$
Normal	$\sigma^2$	$IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2} \right)$ $IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}; \infty \right)$ $IC(\sigma^2; 1 - \alpha) = \left( 0; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha; n-1}^2} \right)$	<p>Vide ii.</p> $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha; n-1}^2) = 1 - \alpha$ $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha; n-1}^2) = \alpha$

❶  $n$  é o tamanho da amostra;

❷  $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .



## Resumo para construir intervalo de confiança

Distribuição	Parâmetro	Intervalo	Quantil
Exponencial	$\mu$	$IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( \chi_{1 - \frac{\alpha}{2}; 2n}^2 \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}; \chi_{\frac{\alpha}{2}; 2n}^2 \cdot \frac{1}{2n\bar{x}} \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( \chi_{1 - \alpha; 2n}^2 \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}; \infty \right)$ $IC(\mu, 1 - \alpha) = \left( 0; \chi_{\alpha; 2n}^2 \cdot \frac{1}{2n\bar{x}} \right)$	Vide ii. $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{1 - \alpha; 2n}^2\right) = 1 - \alpha$ $P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\alpha; 2n}^2\right) = \alpha$
Bernoulli $n \geq 40$	$p$	$IC(p, 1 - \alpha) = \left( -z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\hat{p}}} + \hat{p}; z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\hat{p}}} + \hat{p} \right)$ $IC(p, 1 - \alpha) = \left( z_{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{\hat{p}}} + \hat{p}; 1 \right)$ $IC(p, 1 - \alpha) = \left( 0; z_{1 - \alpha} \frac{1}{2\sqrt{\hat{p}}} + \hat{p} \right)$	$\Phi\left(z_{1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$ $\Phi(z_{1 - \alpha}) = 1 - \alpha$
Outras distribuições $n \geq 40$	$\mu$	$IC(\mu; 1 - \alpha) = \left( -t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$ $IC(\mu; \gamma) = \left( t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty \right)$ $IC(\sigma^2; \gamma) = \left( -\infty; t_{1 - \alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x} \right)$	$P\left(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $P\left(t_{n-1} \leq t_{\alpha; n-1}\right) = \alpha$ $P\left(t_{n-1} \leq t_{1 - \alpha; n-1}\right) = 1 - \alpha$

i.  $n$  é o tamanho da amostra;

ii. 
$$P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; 2n}^2\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ e } P\left(\chi_{2n}^2 \leq \chi_{1 - \frac{\alpha}{2}; 2n}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$